

基于扩展布尔函数的最优对称Z互补码集构造

陈晓玉^{1,2}, 张兆瑜^{1,2}, 杜玉琼^{1,2}

(1.燕山大学信息科学与工程学院, 河北 秦皇岛 066004; 2.河北省信息传输与信号处理重点实验室, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 针对宽带广义空间调制 (GSM) 系统训练序列数目受限的问题, 研究了最优对称Z互补码集 (SZCCS) 和增强型交叉Z互补集 (E-CZCS) 的构造方法。提出了一种基于扩展布尔函数 (EBF) 的最优对称Z互补码集的构造方法, 所得序列具有新的参数形式, 具体为 (q^k, q^{k+1}, q^m, q^m) 。同时, 该序列也是具有大零相关区 (ZCZ) 的增强型交叉Z互补序列集, 且序列的零相关区长度与序列长度比值为1。所得2种序列集参数灵活且不再局限于2的幂次形式。以所提增强型交叉Z互补集为基序列构造广义空间调制系统的训练矩阵, 通过仿真实验验证了该增强型交叉Z互补集的信道估计能达到理论最小均方误差 (MSE)。

关键词: 广义空间调制; 扩展布尔函数; 对称Z互补码; 增强型交叉Z互补集

中图分类号: TN911.2

文献标志码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2025104

Construction of optimal symmetric Z-complementary code set based on extended Boolean function

CHEN Xiaoyu^{1,2}, ZHANG Zhaoyu^{1,2}, DU Yuqiong^{1,2}

1. School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China

2. Hebei Province Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing, Qinhuangdao 066004, China

Abstract: Aiming at the problem of the limited number of training sequences in the wideband generalized spatial modulation (GSM) system, the construction methods of the optimal symmetric Z-complementary code set (SZCCS) and the enhanced cross Z-complementary set (E-CZCS) were studied. A new construction method for the optimal symmetric Z complementary code set based on extended Boolean function (EBF) was proposed. The resulting sequence had a new parameter form, which was specifically represented as (q^k, q^{k+1}, q^m, q^m) . At the same time, the construction was also enhanced cross Z-complementary sequence set with large zero correlation zone (ZCZ), where the ratio of the ZCZ length to the sequence length was 1. The parameters of the two sequence sets obtained were flexible and were no longer limited to powers of 2. Using the proposed enhanced cross Z-complementary set obtained as the base sequence, the training matrix for the generalized space modulation system was constructed. Simulation results demonstrate that the channel estimation of the enhanced cross Z-complementary set can achieve the theoretical minimum mean square error (MSE).

Keywords: generalized spatial modulation, extended Boolean function, symmetric Z-complementary code, enhanced cross Z-complementary set

收稿日期: 2025-03-06; 修回日期: 2025-05-27

通信作者: 陈晓玉, chenxiaoyu@ysu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.62241110); 河北省自然科学基金资助项目 (No.F2025203055); 河北省高等学校科学技术研究基金资助项目 (No.ZD2022026); 河北省重点实验室基金资助项目 (No.202250701010046)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.62241110), The Natural Science Foundation of Hebei Province (No.F2025203055), The Science Research Project of Hebei Education Department (No.ZD2022026), The Key Laboratory Project of Hebei Province (No.202250701010046)

0 引言

序列在科学和工程中,特别是在无线通信和信号处理中有广泛应用。Golay 互补对 (GCP, Golay complementary pair) 的概念由 Golay 在 1961 年首次提出^[1], GCP 的非周期性自相关函数 (AACF, aperiodic auto-correlation function) 在除零时移外处处为零, 但因其长度形式为 $2^a 10^b 26^c$, 序列参数受到很大的限制。为了克服 Golay 序列参数的局限性, Fan 等^[2]将 Golay 互补对的概念扩展为 Z 互补对 (ZCP, Z-complementary pair), 其中“Z”表示零相关区 (ZCZ, zero correlation zone)。零相关区的引入使 Z 互补对的长度更加灵活, 已有学者证明, 存在任意长度的具有小零相关区的二元 Z 互补对^[3]。同样, 相互正交互补序列集 (MOCSS, mutual orthogonal complementary sequence set) 引入零相关区的概念, 可以得到 Z 互补码集 (ZCCS, Z-complementary code set)。Z 互补码集参数更加灵活且有较好的相关性, 在一些特殊场景中, ZCCS 可以代替 MOCSS。在码分多址系统中, ZCCS 也可以解决多址干扰与多径干扰问题, 而且相比 MOCSS 而言, 能成倍增加系统的用户容量。已有研究证明, Z 互补码集的一种特殊形式——对称 Z 互补码集 (SZCCS, symmetrical Z-complementary code set) 可以用作广义空间调制 (GSM, generalized spatial modulation) 系统中的最优训练序列^[4]。对称 Z 互补码集在对称的前端和后端都有零相关区, 前端 ZCZ 和后端 ZCZ 分别对减少小时延和大时延的干扰有特殊效果。

空间调制 (SM, spatial modulation) 技术使用多个发射天线 (TA, transmit antenna) 和一个射频 (RF, radio frequency) 链传输信息, 每个发射天线都对应着一个不同的比特模式。这种技术能有效利用空间资源, 提高数据传输的速率, 而不需要频繁增加频谱资源。因此, 空间调制技术具有零天线间干扰 (IAI, inter-antenna interference)、更低的能耗和更低的收发器复杂性。然而, 空间调制技术每次只能激活一个发射天线来传输信号, 使空间调制要求发射天线的数量必须是 2 的幂次形式且训练序列数也被限制为 2 的幂次形式。因此, 空间调制被推广为广义空间调制, 该系统则通过同时激活多个天线来提供更高的频谱效率^[5-6], 使广义空间调制能够在频谱效率、射频链成本和能

效之间提供灵活性。由于空间调制和广义空间调制传输结构的稀疏性, 使得传统的多输入多输出 (MIMO, multiple-input multiple-output) 系统中的训练序列可能不再适用。

此外, Liu 等^[7]引入了交叉 Z 互补对 (CZCP, cross Z-complementary pair) 的概念, 并将其用于空间调制系统的稀疏训练矩阵设计, 实现了最优信道估计。与传统的 Z 互补对不同, 交叉 Z 互补对有跨通道 ZCZ 的特征, 可以降低非正交信道上的跨信道干扰。然而, 每个交叉 Z 互补对的 ZCZ 宽度至多为其序列长度的一半。近年来, 人们对具有大 ZCZ 宽度和更灵活长度的序列进行了许多研究工作^[8-9], 提出了具有更大 ZCZ 宽度的交叉 Z 互补集 (CZCS, cross Z-complementary set)^[10-11]、具有对称 ZCZ 特性的对称 Z 互补码集 (SZCCS, symmetrical Z-complementary code set)^[4,12-13]、交叉 Z 互补对及其互补配对^[14]、增强型交叉 Z 互补集 (E-CZCS, enhanced cross Z-complementary set)^[15-17]等互补序列的构造方法, 用于减轻由零填充引起的天线间干扰的额外开销。针对宽带 GSM 系统, 文献^[15]提出了增强型交叉 Z 互补集, 该序列可以看作是交叉 Z 互补集的扩展, 在提高信道估计训练效率方面具有显著优势, 能够为未来的系统设计和优化提供有力支持。

目前关于 SZCCS 和 E-CZCS 的研究相对较少, SZCCS 和 E-CZCS 可用于 GSM 系统的最佳训练序列的设计, 与其他序列类别相比, 可以更好地实现信道估计性能。在现有的 SZCCS 和 E-CZCS 直接构造方法中, 基于广义布尔函数构造方法得到的序列集参数限制为 2 的幂次形式^[4], 基于多变量函数的构造方法得到的序列集参数限制为素数的幂次形式^[12]。针对序列参数受限的问题, 本文进一步研究了对称 Z 互补码集和增强型交叉 Z 互补集, 提出了基于扩展布尔函数的最优对称 Z 互补码集新构造方法, 此方法可以得到更大 ZCZ 宽度的增强型交叉 Z 互补集。而且构造的序列集参数不再局限于 2 的幂次和素数幂次的形式, 从而丰富了现有参数, 增强了系统的适应性和灵活性。并且通过仿真实验的方式, 验证了本文所提增强型交叉 Z 互补集作为基序列构造训练序列时, 可以在频率选择信道下的广义空间调制系统的最优信道估计。

1 基本概念

本节主要介绍一些与本文相关的序列设计理论基础知识和工具。

1.1 符号及定义

本节主要介绍与本文相关的符号和定义。

- 1) \mathbb{Z}_N 表示模 N 的整数环。
- 2) $\mathbb{N}_m = \{1, 2, \dots, m\}$ 表示有 m 个元素的集合。
- 3) $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ 。
- 4) $\lfloor x \rfloor$ 表示小于或等于 x 的最大整数。
- 5) \mathbf{X}^H 和 \mathbf{X}^{-1} 分别表示矩阵 \mathbf{X} 的共轭转置和逆矩阵。

6) $\text{Tr}(\mathbf{X})$ 定义为矩阵的迹。

7) $\zeta_q = e^{\frac{j2\pi}{q}}$ 。

定义 1^[2] 对于 2 个长度均为 N 的复数序列 $\mathbf{g}_0 = (g_{0,0}, g_{0,1}, \dots, g_{0,N-1})$ 和 $\mathbf{g}_1 = (g_{1,0}, g_{1,1}, \dots, g_{1,N-1})$, 其非周期互相关函数定义为

$$\theta(\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1; \tau) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1-\tau} g_{0,k+\tau} g_{1,k}^*, & 0 \leq \tau \leq N-1 \\ \sum_{k=0}^{N-1+\tau} g_{0,k} g_{1,k-\tau}^*, & -N+1 \leq \tau < 0 \end{cases} \quad (1)$$

当序列 \mathbf{g}_0 与序列 \mathbf{g}_1 相同, 即 $\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}_1$ 时, $\theta(\mathbf{g}_0; \tau)$ 为序列 \mathbf{g}_0 的非周期自相关函数。

定义 2^[4] 对于序列集 $\mathcal{G} = \{G^s | 0 \leq s \leq M-1\}$, 若满足以下条件

$$\theta(G^{s_1}, G^{s_2}; \tau) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} \theta(\mathbf{g}_n^s; \tau) = 0, \\ |\tau| \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cap \Gamma, s_1 = s_2 = s \\ \sum_{n=0}^{N-1} \theta(\mathbf{g}_n^{s_1}, \mathbf{g}_n^{s_2}; \tau) = 0, \\ |\tau| \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{0\}, s_1 \neq s_2 \end{cases} \quad (2)$$

其中, $G^{s_1}, G^{s_2} \in \mathcal{G}$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_M$, $\Gamma = \{1, 2, \dots, L-1\}$, $\Gamma_1 = \{1, 2, \dots, Z\}$, $\Gamma_2 = \{L-Z, L-Z+1, \dots, L-1\}$, 那么该序列集 \mathcal{G} 称为 (M, N, L, Z) -对称 Z 互补码集, 记为 (M, N, L, Z) -SZCCS。

定义 3^[15] 给定正整数 N, M 和 L , 令序列集 $G^s = \{\mathbf{g}_0^s, \mathbf{g}_1^s, \dots, \mathbf{g}_{N-1}^s\}$ 由长度为 L 的 N 个序列构成。若序列 $\mathcal{G} = \{G^0, G^1, \dots, G^{M-1}\}$ 满足以下 2 个条件

$$\text{C1: } \theta(G^{s_1}, G^{s_2}; \tau) = \sum_{n=0}^{N-1} \theta(\mathbf{g}_n^{s_1}, \mathbf{g}_n^{s_2}; \tau) = \begin{cases} 0, & |\tau| \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cap \Gamma, s_1 = s_2 \\ 0, & |\tau| \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{0\}, s_1 \neq s_2 \end{cases}$$

$$\text{C2: } \hat{\theta}(G^{s_1}, G^{s_2}; \tau) = \sum_{n=0}^{N-1} \theta(\mathbf{g}_n^{s_1}, \mathbf{g}_{(n+1) \bmod N}^{s_2}; \tau) = 0, \\ |\tau| \in \Gamma_2, s_1, s_2 \in \{0, 1, \dots, M-1\}$$

那么, 该序列 \mathcal{G} 称为 (M, N, L, Z) -增强型交叉 Z 互补集, 记为 (M, N, L, Z) -E-CZCS。当 $s_1 = s_2 = 0$, 即 $M = 1$ 时, 增强型交叉 Z 互补集可简化为交叉 Z 互补集。

定义 4 令 $x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \in \mathbb{Z}_q^m$, 扩展布尔函数 $f(x)$ 是从 \mathbb{Z}_q^m 到 \mathbb{Z}_q 的一个映射 f , 其中对于任意 $i \in \mathbb{Z}_m^*$, $x_i \in \mathbb{Z}_q$ 均成立。根据给定的 $f(x)$, 定义序列 $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{q^m-1})$, 其中 $f_i = f(i_1, i_2, \dots, i_m)$, (i_1, i_2, \dots, i_m) 是整数 $i = \sum_{k=1}^m i_k q^{k-1}$ 的 q 进制表示向量。

引理 1^[18] 设 m 和 d 为正整数, 且 $2 \leq d < m$ 。 $\{I_1, I_2, \dots, I_d\}$ 是集合 \mathbb{N}_m 的一部分, π_α 是从 \mathbb{N}_{m_α} 到 I_α 的一个双射映射, 在任意 $\alpha \in \{1, 2, \dots, d\}$ 条件下, $|I_\alpha| = m_\alpha$ 成立。令扩展布尔函数为

$$f = \sum_{\alpha=1}^d \sum_{\beta=1}^{m_\alpha-1} a_{\alpha,\beta} x_{\pi_\alpha(\beta)} x_{\pi_\alpha(\beta+1)} + \sum_{l=1}^{q-1} \sum_{u=1}^m h_{u,l} x_u^l + h_0 \quad (3)$$

其中, $a_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z}_q^*$, 且与 q 互素, $h_{u,l}, h_0 \in \mathbb{Z}_q$, (n_1, n_2, \dots, n_d) 和 (s_1, s_2, \dots, s_d) 分别为 n 和 s 的 q 元表示形式。那么, 集合 $\{G^0, G^1, \dots, G^{q^d-1}\}$ 构成 q 元完全互补码, 其中 $\mathbf{g}_n^s = \mathbf{f} + \sum_{\alpha=1}^d n_\alpha \mathbf{x}_{\pi_\alpha(1)} + \sum_{\alpha=1}^d p_\alpha \mathbf{x}_{\pi_\alpha(m_\alpha)}$, $G^s = \{\mathbf{g}_0^s, \mathbf{g}_1^s, \dots, \mathbf{g}_{q^d-1}^s\}$ 。

引理 2^[19] 设 q 为偶数, (i_1, i_2, \dots, i_m) 和 (j_1, j_2, \dots, j_m) 分别为 i 和 j 的二进制表示, $\{I_1, I_2, \dots, I_d\}$ 为集合 \mathbb{N}_m 的一部分, π_α 是从 \mathbb{N}_{m_α} 到 I_α 的一个双射映射, 在任意 $\alpha \in \mathbb{N}_d$ 条件下, $|I_\alpha| = m_\alpha$ 成立。如果满足以下条件: 1) α_1 是满足 $i_{\pi_{\alpha_1}(\beta)} = j_{\pi_{\alpha_1}(\beta)}$ 的最大整数, 其中 $\alpha \in \mathbb{N}_{\alpha_1}$, $\beta \in \mathbb{N}_{m_{\alpha_1}}$; 2) β_1 是满足 $i_{\pi_{\alpha_1}(\beta_1)} \neq j_{\pi_{\alpha_1}(\beta_1)}$ 的最小整数; 3) 设正整数 i' 和 j' 是分别与 i 和 j 仅在 $\pi_{\alpha_1}(\beta_1 - 1)$ 位置处有不同的整数, 即 $i'_{\pi_{\alpha_1}(\beta_1 - 1)} = 1 -$

$i_{\pi_{\alpha_1}(\beta_1-1)}$ 和 $j'_{\pi_{\alpha_1}(\beta_1-1)} = 1 - j_{\pi_{\alpha_1}(\beta_1-1)}$, 那么有

$$f_{n,i} - f_{n,j} - f_{n,i'} + f_{n,j'} \equiv \frac{q}{2} \pmod{q} \quad (4)$$

定义 5 对于任意一个 (M,N,L,Z) -对称 Z 互补码集 $\mathcal{G} = \{G^s | 0 \leq s \leq M-1\}$, 均满足 $M \leq \lfloor \frac{NL}{Z+1} \rfloor$ 。

特别地, 当等号成立, 即 $M = \lfloor \frac{NL}{Z+1} \rfloor$ 时, 序列集 \mathcal{G} 被称为最优 (M,N,L,Z) -对称 Z 互补码集。

1.2 广义空间调制系统

在 GSM 系统的发射端和接收端分别配备 N_t 个发射天线和 N_r 个接收天线。假设一个 QAM/PSK 调制需要的星座大小为 \mathcal{M}_{GSM} 。广义空间调制系统模型如图 1 所示, 该系统同一时隙选取 N_a 个激活天线用于发送调制信号, $1 < N_a < N_t$, 其他发射天线保持静默。激活天线的选择有组合 $C_{N_t}^{N_a}$ 种可能性。

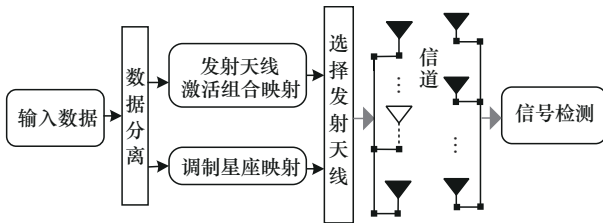


图 1 广义空间调制系统模型

广义空间调制系统同一时隙数据信息比特分为两部分传输, 一部分用于选择激活天线, 需要的比特数为 $b_1 = \lfloor \text{lb}(C_{N_t}^{N_a}) \rfloor$, 另一部分用于选择星座, 需要的比特数为 $b_2 = \lfloor \text{lb} \mathcal{M}_{\text{GSM}} \rfloor$ 。因此, 广义空间调制系统每次能传输的信息量为 $B = b_1 + b_2 = \lfloor \text{lb}(C_{N_t}^{N_a}) \rfloor + \lfloor \text{lb} \mathcal{M}_{\text{GSM}} \rfloor$, 其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示向下取整。

2 构造方法

本节首先提出了基于扩展布尔函数的最优对称 Z 互补码集的构造方法, 然后证明该方法也是一个具有大 ZCZ 的增强型交叉 Z 互补集。

定理 1 设 $q \geq 2$, m 和 d 是正整数, 且 $2 \leq d < m$ 或 $d = 1, m = 2$ 。令扩展布尔函数如式(3)所示。令 $n \in \{0, 1, \dots, q^{k+1} - 1\}$, $s \in \{0, 1, \dots, q^k - 1\}$ (n_1, n_2, \dots, n_d) 和 (s_1, s_2, \dots, s_d) 分别为 n 和 s 的 q 元表示形式, $\mathbf{1}$ 表示长度为 q^{k+1} 的全 1 向量, 序列集 $G^s =$

$\{\mathbf{g}_0^s, \mathbf{g}_1^s, \dots, \mathbf{g}_{q^{k+1}-1}^s\}$, 其中

$$\mathbf{g}_n^s = \mathbf{f} + \sum_{\alpha=1}^k n_{\alpha} \mathbf{x}_{\pi_{\alpha}(1)} + n_{k+1} \mathbf{n}_1 \mathbf{1} + \sum_{\alpha=1}^k s_{\alpha} \mathbf{x}_{\pi_{\alpha}(m_{\alpha})} \quad (5)$$

那么, 该序列集 $\mathcal{G} = \{G^0, G^1, \dots, G^{q^k-1}\}$ 是一个最优 (q^k, q^{k+1}, q^m, q^m) -对称 Z 互补码集。

证明详见附录 1。

例 1 设 $q = 3, k = 1, m = 2$ 。集合 $\mathcal{I} = \{1, 2, 3\}$ 被分为 2 个非空集合 $\mathcal{I}_1 = \{1, 2\}$ 和 $\mathcal{I}_2 = \{3\}$, 设 $\pi_1(1) = 1, \pi_1(2) = 2, \pi_2(1) = 3, h_{1,l} = 1, h_{2,l} = 1$, 扩展布尔函数表示为 $f = x_1 x_2 + x_1 + x_2$ 。根据定理 1, 可以得到一个三元的 $(3, 9, 9, 9)$ -对称 Z 互补码集 $\mathcal{G} = \{G_n^s | \mathbf{g}_n^s = \mathbf{f} + n_1 \mathbf{x}_2 + n_2 n_1 \mathbf{1} + s_1 \mathbf{x}_1\}$, 其中 $n_1, n_2, s_1 \in \mathbb{Z}_3$ 。

定理 2 定理 1 构造得到的序列集 $\mathcal{G} = \{G^0, G^1, \dots, G^{q^k-1}\}$ 是一个 (q^k, q^{k+1}, q^m, q^m) -增强型交叉 Z 互补集。

证明详见附录 2。

基于定理 2 所提出的构造方法, 当参数 q 取不同值时, 可生成不同参数的增强型交叉 Z 互补集。下面例 2 和例 3 分别对 $q = 2$ 和 $q = 3$ 的具体构造过程及相关参数进行了详细阐述。

例 2 设 $q = 2, k = 2, m = 5$ 。集合 $\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 被分为 2 个非空集合 $\mathcal{I}_1 = \{1, 2, 3\}$ 和 $\mathcal{I}_2 = \{4, 5\}$, 设 $\pi_1 = (2, 1, 3), \pi_2 = (5, 4), h_{1,l} = h_{2,l} = 0$, 那么扩展布尔函数可表示为 $f = x_2 x_1 + x_1 x_3 + x_5 x_4$ 。根据定理 2 可以得到一个二元 $(4, 8, 32, 32)$ -E-CZCS, $\mathcal{G} = \{G_n^s | \mathbf{g}_n^s = \mathbf{f} + n_1 \mathbf{x}_2 + n_2 \mathbf{x}_5 + n_3 n_1 \mathbf{1} + s_1 \mathbf{x}_3 + s_2 \mathbf{x}_4\}$, 其中 $n_1, n_2, n_3, s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_2$ 。

例 3 设置和例 1 相同的条件, 根据定理 2 可得到一个三元 $(3, 9, 9, 9)$ -增强型交叉 Z 互补集, 记作 $\mathcal{G} = \{G^s = \{\mathbf{g}_0^s, \mathbf{g}_1^s, \dots, \mathbf{g}_8^s\} | s = 0, 1, 2\}$ 。为验证其序列性能, 图 2 给出了该序列集非周期相关函数和仿真结果的分布情况。设 $G^{s_1}, G^{s_2} \in \mathcal{G}$, 其中 $0 \leq s_1, s_2 \leq 2$ 。从图 2(a) 中可以清楚地看出, 当 $s_1 \neq s_2$ 时, 对于所有的 τ , 互相关函数和 $\theta(G^{s_1}, G^{s_2}; \tau) = 0$ 。当 $s_1 = s_2$ 时, 对于 $\tau = 0$, 互相关函数和 $\theta(G^{s_1}, G^{s_2}; \tau) \neq 0$, 除此之外都为 0。如图 2(b) 所示, 对于所有的 τ, s_1 和 s_2 , 互相关函数和 $\hat{\theta}(G^{s_1}, G^{s_2}; \tau) = 0$ 均成立。

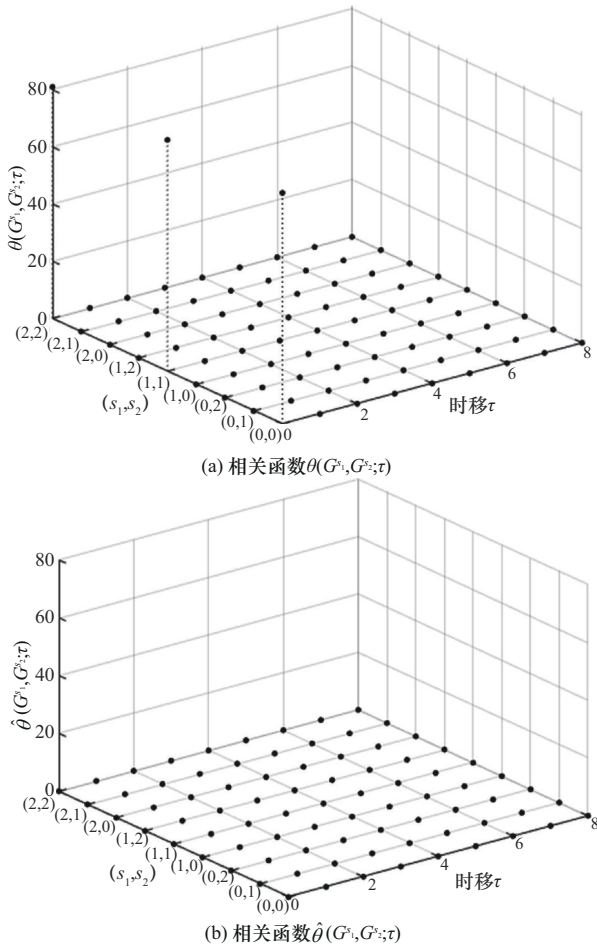


图 2 (3,9,9,9)-E-CZCS 的相关函数

推论 1 在定理 2 中令 $q = 2$, 可以得到文献[16]定理 1 构造的 $(2^k, 2^{k+1}, 2^m, 2^m)$ -增强型交叉 Z 互补集,

此时零相关区宽度理论界 $Z \leq \left\lfloor \frac{NL}{2M} \right\rfloor$ 等号成立, 达到最大值。

3 对比分析

本节对本文提出的最优对称 Z 互补码集和增强型交叉 Z 互补集 2 种序列的构造方法与现有直接构造方法进行了参数对比。

表 1 中列出了本文定理 1 与现有的 2 种最优对称 Z 互补码集直接构造方法的对比。与文献[4]定理 3 的构造方法相比, 本文定理 1 能够提供更为灵活的序列参数, 所提出的最优对称 Z 互补码集可以构造更灵活的最佳训练矩阵, 满足广义空间调制系统中不同模式的发射天线条数。与文献[12]定理 1 中的序列构造方法相比, 本文定理 1 中的序列构造方法构造的对称 Z 互补码集参数形式不再受素数次幂形式的参数限制, 极大地丰富了序列参数。广义空间调制通过灵活设置发射天线和接收天线进行空间复用, 对于更多的天线配置, 系统的用户容量可显著提升。

表 2 给出了本文定理 2 与其他现有增强型交叉 Z 互补集直接构造方法的参数对比。从文献[15]定理 3 和文献[16]定理 1 中的序列参数可以看出, 本文定理 2 所构造的增强型交叉 Z 互补集的参数不再受传统 2 的幂次形式的限制, 通过合理设置变量 q , 可以获得更为灵活的增强型交叉 Z 互补集参数。令

表 1 最优对称 Z 互补码集与现有直接构造方法比较

构造方法	序列集个数	序列条数	序列长度	ZCZ 宽度	是否最优	条件	构造方法
文献[4]定理 3	8	2	2^m	$2^{m-2} - 1$	是	$m \geq 4$	广义布尔函数
文献[12]定理 1	$p^{k+\delta}$	p^k	p^m	$p^{m-\delta} - 1$	是	p 为素数, $1 \leq k \leq m - \delta$	多变量函数
本文定理 1	q^k	q^{k+1}	q^m	q^m	是	$q \geq 2, 2 \leq d < m$ 或 $d = 1, m = 2$	扩展布尔函数

表 2 增强型交叉 Z 互补集与现有直接构造方法比较

构造方法	序列集个数	序列条数	序列长度	ZCZ 宽度	Z/L	条件	构造方法
文献[15]定理 3	2^k	2^v	2^m	$2^{\pi_1(1)-1}$	$2^{v-k-1} (v \leq k)$	$v \leq k$ $\pi_{v+\gamma}(1) = m - \gamma + 1$	广义布尔函数
文献[16]定理 1	2^k	2^{k+1}	2^m	2^m	1	$k \leq m, q$ 是偶数	布尔函数
文献[17]定理 1	b^k	b^v	b^m	$(b-1)b^{\pi_1(1)-1}$	$\frac{(b-1)b^{m-k+v}}{b^m} (v \leq k)$	$v \leq k, b \geq 2, b q$ $\pi_{v+\gamma}(1) = m - \gamma + 1$	扩展广义布尔函数
本文定理 2	q^k	q^{k+1}	q^m	q^m	1	$q \geq 2, 2 \leq d < m$ 或 $d = 1, m = 2$	扩展布尔函数

q 的值为 2, 就能得到与文献[16]定理 1 参数相同的序列集, 此时 ZCZ 宽度达到了理论界。此外, 与文献[15]定理 3 和文献[17]定理 1 相比, 本文定理 2 构造的增强型交叉 Z 互补集的零相关区宽度与序列长度的比值达到了 1, 能够实现更大的 ZCZ 宽度。

4 仿真实验分析

本节基于文献[4]和文献[15]的训练矩阵构造方法和频率选择信道下广义空间调制系统的信道估计方法进行仿真实验, 对比分析本文提出的最优增强型交叉 Z 互补集的信道估计性能。基于训练序列的通用单载波 MIMO 传输结构如图 3 所示。

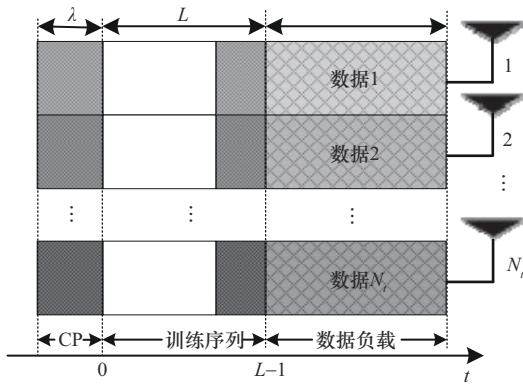


图 3 基于训练序列的通用单载波 MIMO 传输结构

4.1 训练矩阵框架

令 $1 \leq n \leq N_t$, 假设准静态频率选择性信道中从第 n 个发射天线到接收器的信道脉冲响应为一个长度为 $(\lambda + 1)$ 的离散向量, 即 $\mathbf{h}_n = [h_{n,0}, h_{n,1}, \dots, h_{n,\lambda}]^T$, 其中 $h_{n,l} (0 \leq l \leq \lambda)$ 是第 l 条路径的信道系数。广义空间调制系统中第 n 个发射天线上发送的训练序列

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0^0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_0^1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{g}_0^{N_a-1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_1^1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{g}_1^{N_a-1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{T}_{N-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{N-1}^0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_{N-1}^1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{g}_{N-1}^{N_a-1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中, $\{\mathbf{g}_0^0, \mathbf{g}_1^0, \dots, \mathbf{g}_{N-1}^0\}, \{\mathbf{g}_0^1, \mathbf{g}_1^1, \dots, \mathbf{g}_{N-1}^1\}, \dots, \{\mathbf{g}_0^{N_a-1}, \mathbf{g}_1^{N_a-1}, \dots, \mathbf{g}_{N-1}^{N_a-1}\}$ 是增强型交叉 Z 互补集 \mathcal{G} 中的 N_a 个序列集, 且 $\mathbf{0}$ 表示长度为 L 的全零向量。此时可以得到广义空间调制系统的训练矩阵 \mathbf{T} 结构, 如式(10)所示。此时, 训练矩阵任意两行的非周期互相关函数的 ZCZ 宽度与增强型交叉 Z 互补集的 ZCZ

表示为 $\mathbf{x}_n = [x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,L-1}]$, 假设所有的训练序列具有相同的能量 E , 且 $E = \sum_{l=0}^{L-1} |x_{n,l}|^2, 1 \leq n \leq N_t$ 。

为了便于处理, 定义 N_t 个发射天线上的多径信号为 $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_{N_t})_{L \times N_t(\lambda+1)}$, 其中

$$\mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} x_{n,0} & x_{n,1} & \dots & x_{n,L-\lambda} \\ x_{n,1} & x_{n,0} & \dots & x_{n,L-\lambda+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,L-1} & x_{n,L-2} & \dots & x_{n,L-\lambda-1} \end{bmatrix}_{L \times (\lambda+1)} \quad (6)$$

系统传输模型可描述为 $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{h} + \mathbf{w}$, 其中 \mathbf{w} 是均值为 0、方差为 $\frac{\sigma_w^2}{2}$ 的离散不相关复高斯白噪声, 信道响应表示为

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{N_t} \end{bmatrix}_{N_t(\lambda+1) \times 1} \quad (7)$$

基于训练序列的信道归一化均方误差 (MSE, mean square error) 的计算式可以表示为

$$\text{MSE} = \frac{\sigma_w^2}{N_t \lambda + N_t} \text{Tr}((\mathbf{X}^H \mathbf{X})^{-1}) \quad (8)$$

那么训练序列在信道估计下的最小均方误差为 $\min \text{MSE} = \frac{\sigma_w^2}{E}$ 。下面简要介绍本文实验设计的训练框架。

对于正整数 N_t 和 N_a , 令 $V = \left\lfloor \frac{N_t}{N_a} \right\rfloor$ 。 $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_{N-1}$ 表示 N 个尺寸为 $N_a \times VL$ 的训练子块, 如式(9)所示。

宽度一致。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 & \dots & \mathbf{T}_{N-1} \\ \mathbf{T}_0^{(L)} & \mathbf{T}_1^{(L)} & \dots & \mathbf{T}_{N-1}^{(L)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{T}_0^{((V-1)L)} & \mathbf{T}_1^{((V-1)L)} & \dots & \mathbf{T}_{N-1}^{((V-1)L)} \end{bmatrix}_{VN_a \times NVL} \quad (10)$$

4.2 训练结果

设置广义空间调制系统的发射天线个数为 $N_t = 8$, 激活天线个数为 $N_a = 4$, $V = 2$ 。为便于参数对比, 本文仿真实验选取例 2 构造的增强型交叉 Z 互补集及同长度 (32 位) 的其他序列集作为基序列。鉴于文献[16]在相同参数配置下生成的亦为 (4,8,32,32)-增强型交叉 Z 互补集, 故不纳入对比组, 以保证比较的有效性。文献[17]中增强型交叉 Z 互补集的训练矩阵如式(11)中 Ψ' 所示。应用文献[4]构造的对称 Z 互补码集, 文献[15]构造的增强型交叉 Z 互补集和随机序列用于构造训练矩阵时, 将 Ψ 中训练序列 $\{s_2^0, s_2^1, s_2^2, s_2^3; s_3^0, s_3^1, s_3^2, s_3^3\}$ 替换为 $\{s_0^0, s_0^1, s_0^2, s_0^3; s_1^0, s_1^1, s_1^2, s_1^3\}$ 。例 2 中的 (4,8,32,32)-增强型交叉 Z 互补集生成广义空间调制系统训练矩阵如式(12)所示。

$$\Psi = \begin{bmatrix} s_0^0 & 0 & s_1^0 & 0 & s_2^0 & 0 & s_3^0 & 0 \\ s_0^1 & 0 & s_1^1 & 0 & s_2^1 & 0 & s_3^1 & 0 \\ s_0^2 & 0 & s_1^2 & 0 & s_2^2 & 0 & s_3^2 & 0 \\ s_0^3 & 0 & s_1^3 & 0 & s_2^3 & 0 & s_3^3 & 0 \\ 0 & s_0^0 & 0 & s_0^1 & 0 & s_0^2 & 0 & s_0^3 \\ 0 & s_0^1 & 0 & s_0^1 & 0 & s_0^2 & 0 & s_0^3 \\ 0 & s_0^2 & 0 & s_0^2 & 0 & s_0^2 & 0 & s_0^3 \\ 0 & s_0^3 & 0 & s_0^3 & 0 & s_0^3 & 0 & s_0^3 \end{bmatrix}_{8 \times 256}$$

$$\Psi' = [\Psi \quad \Psi] \quad (11)$$

图 4 展示了多径数目 $\lambda = 15$ 时, 训练序列在不同信噪比下的均方误差。由图 4 可以看出, 在相同条件下, 本文提出的 (4,8,32,32)-增强型交叉 Z 互补集可以实现最优信道估计, 均方误差性能优于其他 4 条对比序列。

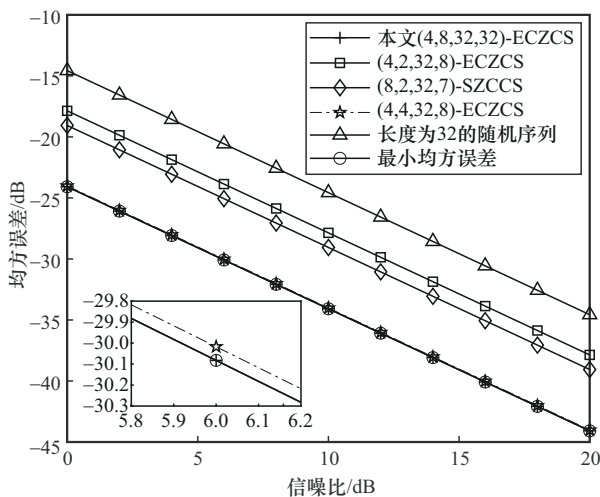


图 4 不同信噪比下的均方误差

图 5 比较了不同基序列构成的训练矩阵在信噪比为 16 dB 的条件下, 不同多径数目下的均方误差。图 5 的实验结果表明, 基于本文提出的最优增强型交叉 Z 互补集构造的训练矩阵可以实现理论推导的信道估计的最小均方误差, 当多径数目增至 12 时, 本文序列的均方误差性能优于现有对比序列。相对于其他对比序列, 由于最优增强型交叉 Z 互补集大零相关区和独特的集间互相关特性, 所以可以在更大的多径数目下实现最优信道估计。

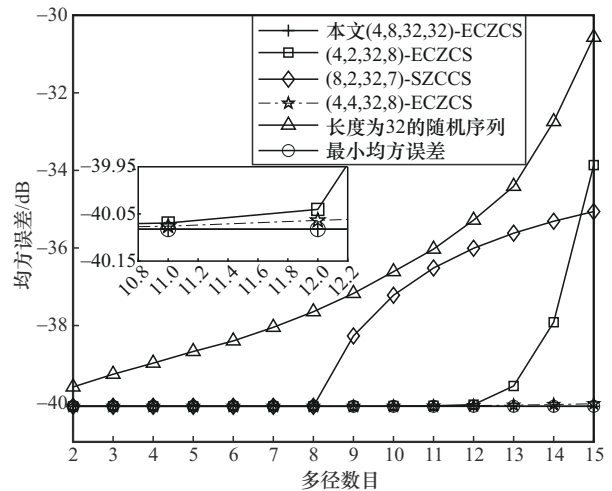


图 5 不同多径数目下的均方误差

5 结束语

本文首先基于扩展布尔函数提出了新的最优对称 Z 互补码集的直接构造方法, 所得到的对称 Z 互补码集具有新的参数结构, 且 ZCZ 宽度达到理论上界, 可以应用到 GSM 系统中以适应更多的应用场景。进一步证明了该序列集为增强型交叉 Z 互补集, 并且具有较大的零相关区宽度, ZCZ 宽度与序列长度的比值为 1。本文方法可以生成参数灵活的最优对称 Z 互补码集和增强型交叉 Z 互补集, 从而为无线通信系统不同的应用场景提供性能优良的序列。最后, 通过仿真实验验证了本文所提增强型交叉 Z 互补集作为基序列构造广义空间调制系统训练矩阵时, 在不同信噪比和多径数目的条件下, 均方误差性能均优于其他等长对比序列, 在频率选择信道中可以实现最优信道估计。

附录 1 定理 1 证明

证明 设 $(n_1, n_2, \dots, n_{k+1})$ 和 (s_1, s_2, \dots, s_k) 分别为任意 2 个

非负整数 n 和 s 的 q 元表示。若要证明序列集 $\mathcal{G} = \{G^s = \{\mathbf{g}_0^s, \mathbf{g}_1^s, \dots, \mathbf{g}_{q^k-1}^s\} \mid 0 \leq s \leq M-1\}$ 为对称 Z 互补码集, 需证明该序列集 \mathcal{G} 满足定义 2 中的式(2)。

引理 1 中, $\left\{ \left\{ \mathbf{g}_0^s, \mathbf{g}_1^s, \dots, \mathbf{g}_{q^k-1}^s \right\} \mid 0 \leq s \leq q^k-1 \right\}$ 是一个 (q^k, q^m) -

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0^0 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_1^0 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_2^0 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_3^0 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_4^0 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_5^0 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_6^0 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_7^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_0^1 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_1^1 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_2^1 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_3^1 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_4^1 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_5^1 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_6^1 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_7^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_0^2 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_1^2 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_2^2 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_3^2 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_4^2 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_5^2 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_6^2 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_7^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_0^3 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_1^3 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_2^3 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_3^3 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_4^3 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_5^3 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_6^3 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_7^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{g}_0^0 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_1^0 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_2^0 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_3^0 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_4^0 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_5^0 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_6^0 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_7^0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{g}_0^1 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_1^1 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_2^1 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_3^1 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_4^1 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_5^1 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_6^1 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_7^1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{g}_0^2 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_1^2 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_2^2 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_3^2 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_4^2 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_5^2 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_6^2 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_7^2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{g}_0^3 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_1^3 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_2^3 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_3^3 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_4^3 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_5^3 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_6^3 & \mathbf{0} & \mathbf{g}_7^3 \end{bmatrix}_{8 \times 512} \quad (12)$$

$$\theta(G^s, G^{s'}; \tau) = \sum_{n=0}^{q^{k+1}-1} \theta(\mathbf{g}_n^s, \mathbf{g}_n^{s'}; \tau) \quad (13)$$

将式(13)的求和分为 2 个部分的和, 可整理为

$$\sum_{n=0}^{q^{k+1}-1} \theta(\mathbf{g}_n^s, \mathbf{g}_n^{s'}; \tau) = \sum_{n=0}^{q^k-1} \theta(\mathbf{g}_n^s, \mathbf{g}_n^{s'}; \tau) + \sum_{n=q^k}^{q^{k+1}-1} \theta(\mathbf{g}_n^s, \mathbf{g}_n^{s'}; \tau) = 0 \quad (14)$$

式(14)在 $|\tau| \neq 0$, $s = s'$ 和任意 $|\tau|$, $s \neq s'$ 条件下均成立。当 $s = s'$ 时为自相关函数, 记为 $\theta(G^s; \tau)$, 在 $|\tau| = 0$ 位置处值为 NL 。

根据定义 5 中给出的理论界计算可得 $\left\lfloor \frac{NL}{Z+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q^{k+1}q^m}{q^m+1} \right\rfloor = q^k$, 等号成立。因此, 定理 1 构造得到的序列集 $\mathcal{G} = \{G^0, G^1, \dots, G^{q^k-1}\}$ 是最优 (q^k, q^{k+1}, q^m, q^m) -对称 Z 互补码集。证毕。

附录 2 定理 2 证明

证明 若要证明序列集 \mathcal{G} 是一个 (q^k, q^{k+1}, q^m, q^m) -增强型交叉 Z 互补集, 需证明该序列集 \mathcal{G} 满足定义 3 中的 C1 和 C2 这 2 个条件。设 $(n_1, n_2, \dots, n_{k+1})$ 和 (s_1, s_2, \dots, s_k) 分别为任意 2 个非负整数 n 和 s 的 q 进制表示。

条件 1 由定理 1 的证明可知, 序列集 \mathcal{G} 是一个 SZCCS, 满足定义 3 中 C1。

条件 2 若要证明该序列集 \mathcal{G} 满足 C2, 需证明当 $0 \leq |\tau| \leq q^m - 1$ 时, 式(15)成立。

$$\hat{\theta}(G^s, G^{s'}; \tau) = \sum_{n=0}^{q^k-1} \theta(\mathbf{g}_n^s, \mathbf{g}_{(n+1) \bmod N}^{s'}; \tau) = \sum_{n=0}^{q^k-1} \sum_{i=0}^{q^m-1-\mu} \zeta^{\mathbf{g}_{n,i}^s - \mathbf{g}_{(n+1) \bmod N, i}^{s'}} = 0 \quad (15)$$

令 (n_1, n_2, \dots, n_v) 和 (h_1, h_2, \dots, h_v) 分别为 n 和 h 的 q 进制表示, (i_1, i_2, \dots, i_m) 和 (j_1, j_2, \dots, j_m) 分别为 i 和 j 的 q 进制表示, 其中 $j = i + \mu$, $h = (n+1) \bmod N$, $v = k+1$ 。

根据定理 1 中式(5)可知, $\mathbf{g}_{n,i}^s - \mathbf{g}_{h,j}^{s'} = \mathbf{f}_{n,i}^s + n_{\alpha} i_{\pi_{\alpha}(1)}$

完全互补码。同理可得, 序列 $\left\{ \left\{ \mathbf{g}_{q^k}^s, \mathbf{g}_{q^k+1}^s, \dots, \mathbf{g}_{q^{k+1}-1}^s \right\} \mid 0 \leq s \leq q^k-1 \right\}$ 是 (q^k, q^m) -完全互补码。

由定义 2 可知, 在 $G^s, G^{s'} \in \mathcal{G}$, $0 \leq s, s' \leq q^k-1$ 条件下, 存在互相关函数

$s_{\alpha} i_{\pi_{\alpha}(m_{\alpha})} - (f_{h,j} + n_{\alpha} j_{\pi_{\alpha}(1)} + s_{\alpha} j_{\pi_{\alpha}(m_{\alpha})})$, 因此, 式(15)可整理为

$$\hat{\theta}(G^s, G^{s'}; \tau) = \sum_{n=0}^{q^k-1} \sum_{i=0}^{q^m-1-\mu} \zeta^{\mathbf{g}_{n,i}^s - \mathbf{g}_{h,j}^{s'}} = \sum_{i=0}^{q^m-1-\mu} \zeta^{\mathbf{f}_{n,i} - \mathbf{f}_{h,j}} \prod_{\alpha=1}^k \left(\sum_{n_{\alpha}} \zeta^{n_{\alpha}(i_{\pi_{\alpha}(1)} - j_{\pi_{\alpha}(1)})} \right) \prod_{\alpha=1}^k \left(\sum_{n_{\alpha}} \zeta^{s_{\alpha} i_{\pi_{\alpha}(m_{\alpha})} - s'_{\alpha} j_{\pi_{\alpha}(m_{\alpha})}} \right) \quad (16)$$

情况 1。对于一些 $\alpha \in \{1, 2, \dots, k\}$, $i_{\pi_{\alpha}(1)} \neq j_{\pi_{\alpha}(1)}$ 成立。由此可知

$$\prod_{\alpha=1}^k \left(\sum_{n_{\alpha}} \zeta^{n_{\alpha}(i_{\pi_{\alpha}(1)} - j_{\pi_{\alpha}(1)})} \right) = 0 \quad (17)$$

将式(17)代入式(16), 结果为 0, 即 $\hat{\theta}(G^s, G^{s'}; \tau) = 0$, 故 C2 成立。

情况 2。对于所有 $\alpha \in \{1, 2, \dots, k\}$, $i_{\pi_{\alpha}(1)} = j_{\pi_{\alpha}(1)}$ 成立。将式(15)整理得到

$$\prod_{\alpha=1}^k \left(\sum_{n_{\alpha}} \zeta^{n_{\alpha}(i_{\pi_{\alpha}(1)} - j_{\pi_{\alpha}(1)})} \right) = \prod_{\alpha=1}^k \left(\sum_{n_{\alpha}} \zeta^0 \right) = q^k \quad (18)$$

将式(18)代入式(16), 可整理得

$$\hat{\theta}(G^s, G^{s'}; \mu) = q^k \sum_{i=0}^{q^m-1-\mu} \zeta^{\mathbf{f}_{n,i} - \mathbf{f}_{h,j}} \prod_{\alpha=1}^k \left(\sum_{n_{\alpha}} \zeta^{s_{\alpha} i_{\pi_{\alpha}(m_{\alpha})} - s'_{\alpha} j_{\pi_{\alpha}(m_{\alpha})}} \right) \quad (19)$$

与引理 2 类似, 假设: 1) α_1 是满足 $i_{\pi_{\alpha_1}(\beta)} = j_{\pi_{\alpha_1}(\beta)}$ 的最大值, 其中 $\alpha \in \mathbb{N}_{\alpha_1}$, $\beta \in \mathbb{N}_{m_{\alpha}}$; 2) β_1 是满足 $i_{\pi_{\alpha_1}(\beta_1)} \neq j_{\pi_{\alpha_1}(\beta_1)}$ 的最小值; 3) 设 $i^{(t)}$ 和 $j^{(t)}$ 分别是与 i 和 j 仅在 $\pi_{\alpha_1}(\beta_1 - 1)$ 处一个位置不同的整数, 即 $i^{(t)}_{\pi_{\alpha_1}(\beta_1-1)} = t \oplus i_{\pi_{\alpha_1}(\beta_1-1)}$, $j^{(t)}_{\pi_{\alpha_1}(\beta_1-1)} = t \oplus j_{\pi_{\alpha_1}(\beta_1-1)}$, 则可以得到

$$\mathbf{f}_{n,i}^s - \mathbf{f}_{n,i^{(t)}}^{s'} - \mathbf{f}_{h,j}^s + \mathbf{f}_{h,j^{(t)}}^{s'} = t_{\alpha_1, \beta_1-1} \left(i_{\pi_{\alpha_1}(\beta_1)} - j_{\pi_{\alpha_1}(\beta_1)} \right) \quad (20)$$

$$\sum_{t=0}^{q-1} \zeta^{f_{n_i(t)} - f_{h_j(t)}} = 0 \quad (21)$$

将式(21)代入式(18), 可得

$$\hat{\theta}(G^s, G^{s'}; \tau) = q^k \sum_{i=0}^{q^m-1-\mu} \zeta^{f_{n_j} - f_{h_j}} \prod_{\alpha=1}^k \left(\sum_{n_\alpha} \zeta^{s_\alpha i_{\pi_\alpha} - s'_\alpha j_{\pi_\alpha}} \right) = 0 \quad (22)$$

因此, C2 成立。

综上所述, 定理2 成立。证毕。

参考文献:

- [1] GOLAY M. Complementary series[J]. IRE Transactions on Information Theory, 1961, 7(2): 82-87.
- [2] FAN P Z, YUAN W N, TU Y F. Z-complementary binary sequences[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2007, 14(8): 509-512.
- [3] LI X D, FAN P Z, TANG X H, et al. Existence of binary Z-complementary pairs[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2011, 18(1): 63-66.
- [4] ZHOU Y J, ZHOU Z C, LIU Z L, et al. Symmetrical Z-complementary code sets for optimal training in generalized spatial modulation[C]//Proceedings of the 2022 10th International Workshop on Signal Design and Its Applications in Communications (IWSDA). Piscataway: IEEE Press, 2022: 1-5.
- [5] YOUNIS A, SERAFIMOVSKI N, MESLEH R, et al. Generalised spatial modulation[C]//Proceedings of the 2010 Conference Record of the Forty Fourth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Piscataway: IEEE Press, 2010: 1498-1502.
- [6] GUO S S, ZHANG H X, ZHANG P, et al. Signal shaping for generalized spatial modulation and generalized quadrature spatial modulation[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2019, 18(8): 4047-4059.
- [7] LIU Z L, YANG P, GUAN Y L, et al. Cross Z-complementary pairs for optimal training in spatial modulation over frequency selective channels[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2020, 68: 1529-1543.
- [8] ZHANG H, FAN C L, YANG Y, et al. New binary cross Z-complementary pairs with large CZC ratio[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2023, 69(2): 1328-1336.
- [9] HUANG Z M, PAI C Y, CHEN C Y. Binary cross Z-complementary pairs with flexible lengths from Boolean functions[J]. IEEE Communications Letters, 2021, 25(4): 1057-1061.
- [10] HUANG Z M, PAI C Y, CHEN C Y. Cross Z-complementary sets for training design in spatial modulation[J]. IEEE Transactions on Communications, 2022, 70(8): 5030-5045.
- [11] HUANG Z M, PAI C Y, CHEN C Y. A novel construction of optimal cross Z-complementary sets based on generalized Boolean functions[C]//Proceedings of the 2022 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Piscataway: IEEE Press, 2022: 1725-1730.
- [12] KUMAR P, MAJHI S, PAUL S. A direct construction of optimal symmetrical Z-complementary code sets of prime power lengths[C]//Proceedings of the 2023 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Piscataway: IEEE Press, 2023: 1283-1287.
- [13] KUMAR R, SRIVASTAVA P K, MAJHI S. A new construction of optimal symmetrical ZCCS[C]//Proceedings of the 2024 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Piscataway: IEEE Press, 2024: 1748-1752.
- [14] HUANG Z M, HU C, LIU Z L, et al. On the mates of cross Z-complementary pairs for training sequence design in generalized spatial modulation[J]. IEEE Access, 2023, 11: 145231-145237.
- [15] HUANG Z M, PAI C Y, LIU Z L, et al. Enhanced cross Z-complementary set and its application in generalized spatial modulation[J]. IEEE Open Journal of the Communications Society, 2024, 5: 4674-4690.
- [16] HUANG Z M, PAI C Y, LIU Z L, et al. A new construction of enhanced cross Z-complementary sets with maximum zero correlation zone[C]//Proceedings of the 2024 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Piscataway: IEEE Press, 2024: 1137-1142.
- [17] 彭秀平, 刘银娜, 王毓, 等. 面向广义空间调制的增强型交叉Z互补集的新构造[J]. 通信学报, 2024, 45(12): 153-161.
PENG X P, LIU Y N, WANG Y, et al. New construction of enhanced cross Z-complementary set for generalized spatial modulation[J]. Journal on Communications, 2024, 45(12): 153-161.
- [18] XIAO H Y, CAO X W. New constructions of mutually orthogonal complementary sets and Z-complementary code sets based on extended Boolean functions[J]. Cryptography and Communications, 2024, 16(1): 167-184.
- [19] CHEN C Y, WANG C H, CHAO C C. Complete complementary codes and generalized reed-muller codes[J]. IEEE Communications Letters, 2008, 12(11): 849-851.

[作者简介]



陈晓玉 (1983-), 女, 内蒙古赤峰人, 博士, 燕山大学副教授、博士生导师, 主要研究方向为序列设计、无线通信技术。



张兆瑜 (2001-), 女, 河北石家庄人, 燕山大学硕士生, 主要研究方向为序列设计。



杜玉琼 (1999-), 女, 河北石家庄人, 燕山大学硕士生, 主要研究方向为序列设计。